Dispense di Matematica

La funzione logaritmica e la funzione esponenziale

π

Ing. Alessandro Pochì

(Appunti di lezione svolti all'ITIS M.M.Milano)

Aggiornamento al 20 Gennaio 2014

Definizione di Logaritmo

"Il logaritmo è l'esponente da dare alla base per avere l'argomento"

Consideriamo l'equazione:

argomento

logaritmo

$$\log_a b = c$$

base

- *"a" è la base del logaritmo, se viene omessa significa che è dieci;*
- *"b"è l'argomento del logaritmo e deve necessariamente essere b>0;*
- *"c" è il logaritmo.*

Avremo quindi che la definizione di logaritmo, equivale a scrivere:

$$\log_a b = c \Leftrightarrow a^c = b$$

Esempi definizione

$$\log_3 81 = 4 \Leftrightarrow 3^4 = 81$$

$$\log_{10} 1000 = 3 \Leftrightarrow 10^3 = 1000$$

$\log 1 = 0 \Leftrightarrow 10^0 = 1$ *(qualunque sia la base)*

Il simbolo $\Leftrightarrow$ *significa "se e solo se"*

Ecco le regole fondamentali sui logaritmi:

$$\log(a \cdot b) = \log(a) + \log(b)$$

$$\log(\frac{a}{b}) = \log(a) - \log(b)$$

$$k \cdot \log(a) = \log(a^k)$$

Esempi regole

$$\log\frac{3}{5} = \log 3 - \log 5$$

$$\log(7z) = \log 7 + \log z$$

$$5\log x = \log x^5$$

Funzione logaritmica

Consideriamo la funzione $y = \log_a x$

Se la base "*a*" è compresa tra zero e uno oppure maggiore di uno la funzione avrà un grafico diverso.

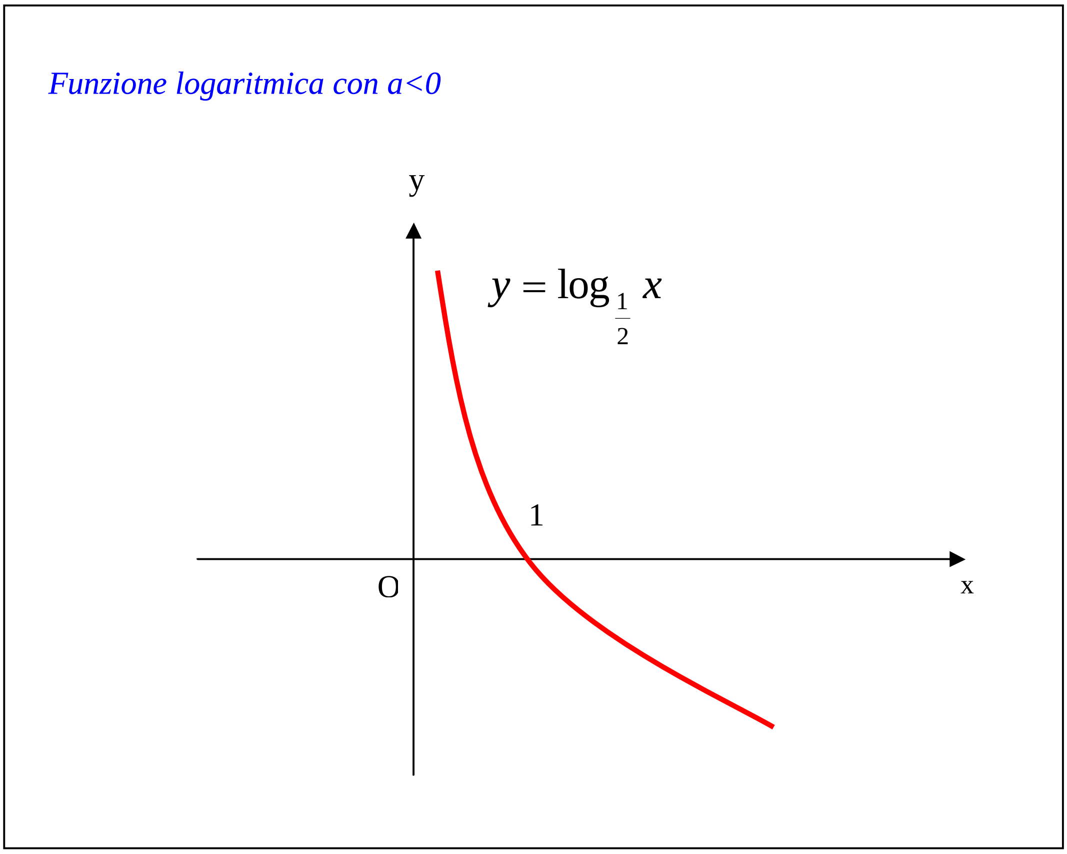
<u>Caso con 0<a<1</u>

Facciamo un esempio considerando la seguente funzione:

$$y = \log_{\frac{1}{2}} x$$

Costruiamo una tabella per determinare alcuni punti del grafico:

x	0,25	0,50	1	2	3	4
$y = \log_{\frac{1}{2}} x$	2	1	0	-1	-1,58	-2



Il grafico ha un andamento "decrescente" e passa, sull'asse delle x per il punto 1, cioè $y = \log_{\frac{1}{2}} 1 = 0$

Da notare inoltre che il grafico si trova nella parte positiva delle x e non interseca mai l'asse delle y.

Caso con a>1

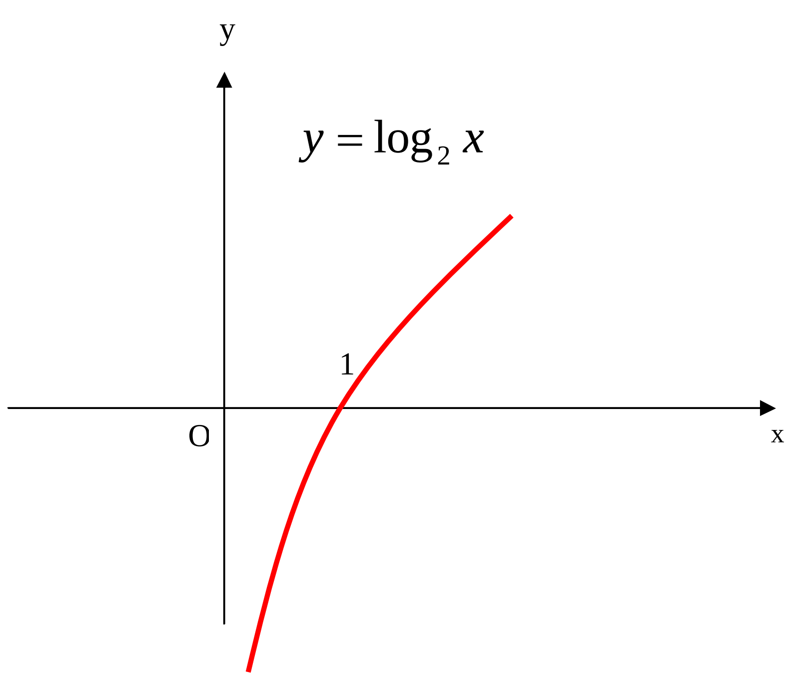
Facciamo un esempio considerando la seguente funzione:

$$y = \log_2 x$$

Costruiamo una tabella per determinare alcuni punti del grafico:

x	0,25	0,50	1	2	3	4
$y = \log_2 x$	-2	-1	0	1	1,58	2

Funzione logaritmica con a>0



Il grafico ha un andamento “crescente” e passa, anche questa volta, sull’asse delle x per il punto 1, cioè $y = \log_2 1 = 0$

Da notare inoltre che il grafico si trova nella parte positiva delle x e non interseca mai l'asse delle y.

Funzione esponenziale

Consideriamo la funzione $y=a^x$

Se la base "*a*" è compresa tra zero e uno oppure maggiore di uno la funzione avrà un grafico diverso.

<u>Caso con 0<a<1</u>

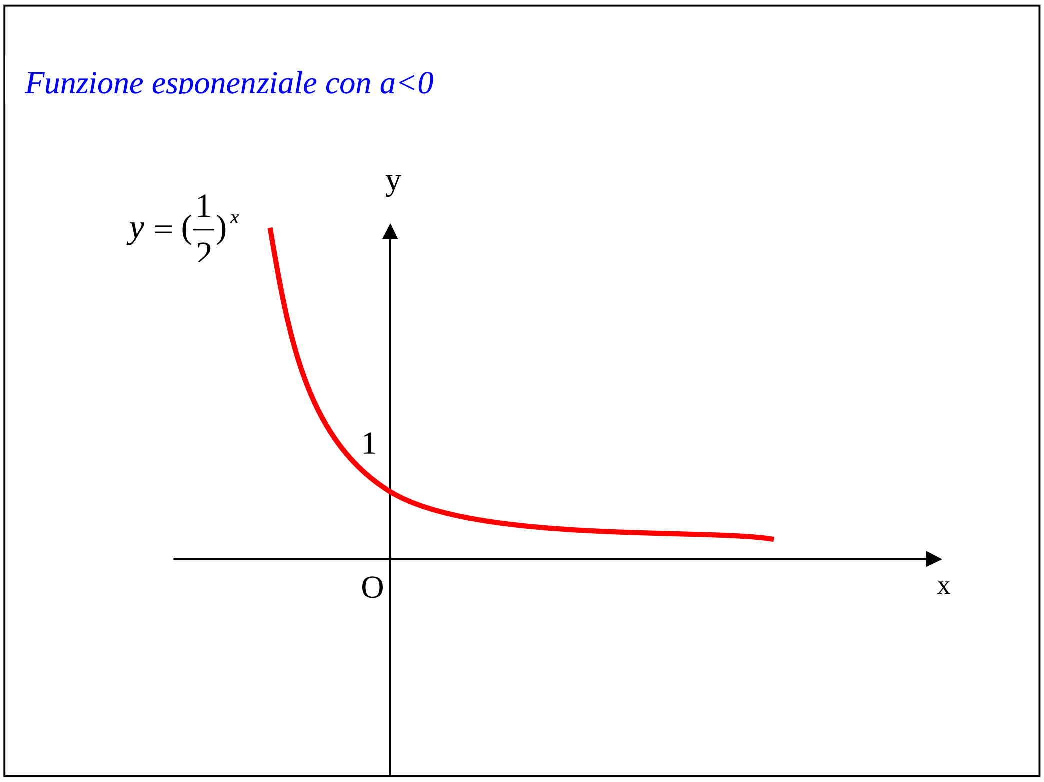
Facciamo un esempio considerando la seguente funzione:

$$y = (\frac{1}{2})^x$$

Costruiamo una tabella per determinare alcuni punti del grafico:

x	-2	-1	0	1	2	3	4
$y = (\frac{1}{2})^x$	4	2	1	0,5	0,25	0,125	0,0625

si ottiene il seguente grafico:



Il grafico ha un andamento “decrescente” e passa, sull’asse delle y per il punto 1, cioè $y = (\frac{1}{2})^0 = 1$

Da notare inoltre che il grafico si trova nella parte positiva delle y e non interseca mai l'asse delle x, ciò significa che $a^x > 0$ sempre.

Caso con a>1

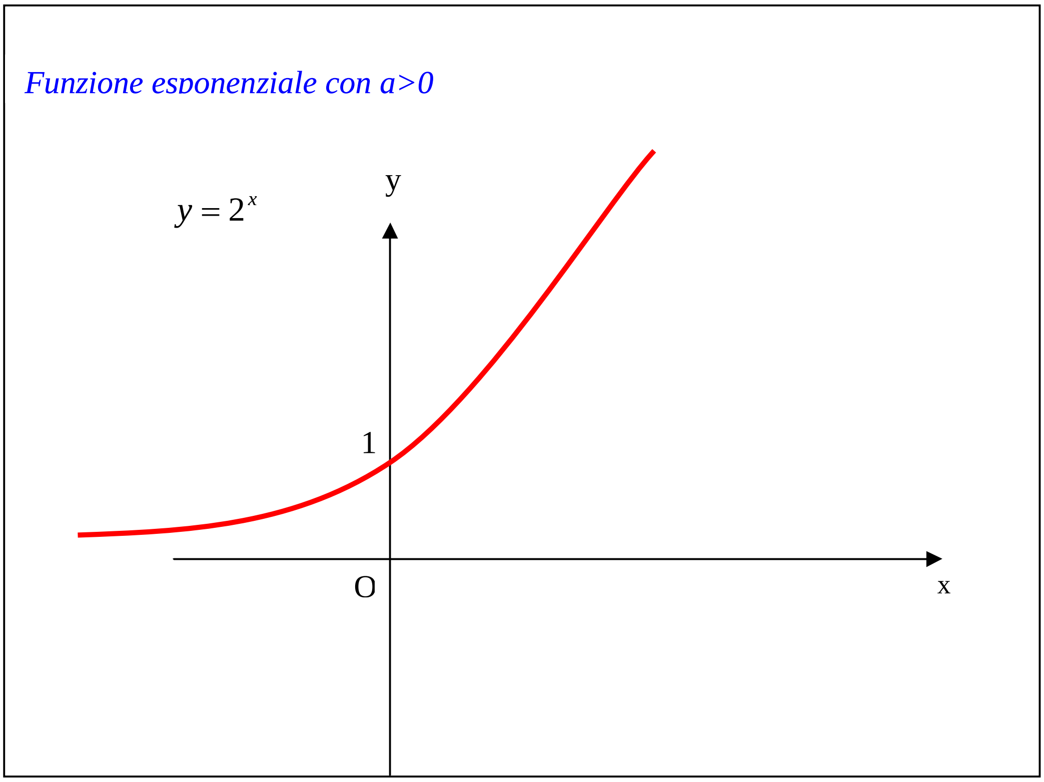
Facciamo un esempio considerando la seguente funzione:

$$y = 2^x$$

Costruiamo una tabella per determinare alcuni punti del grafico:

x	-2	-1	0	1	2	3	4
$y = 2^x$	0,25	0,5	1	2	4	8	16

si ottiene il seguente grafico:



Il grafico ha un andamento “crescente” e passa sull’asse delle y per il punto 1, cioè $y = 2^0 = 1$

Da notare inoltre che il grafico si trova nella parte positiva delle y e non interseca mai l'asse delle x, ciò significa che $a^x > 0$ sempre.

ESERCIZI SVOLTI (tracce liberamente tratte dalla rete e risolte e commentati in classe)

Sarà utile ricordare le regole fondamentali sui logaritmi:

$$\log(a \cdot b) = \log(a) + \log(b)$$
$$\log(\frac{a}{b}) = \log(a) - \log(b)$$
$$k \cdot \log(a) = \log(a^k)$$

ESERCIZIO 1

$2^X + 2^{(X+1)} = 2^{(X-1)} + 7$ dividiamo per 2^x

$\frac{2^X}{2^X} + \frac{2^{(X+1)}}{2^X} = \frac{2^{(X-1)}}{2^X} + \frac{7}{2^X}$ applicando le regole sulle potenze:

$$1 + 2^{(x+1-x)} = 2^{(x-1-x)} + \frac{7}{2^x}$$

$$1 + 2^{(1)} = 2^{(-1)} + \frac{7}{2^x}$$

$$3 = \frac{1}{2} + \frac{7}{2^x}$$

$$3 - \frac{1}{2} = \frac{7}{2^x}$$

$\frac{5}{2} = \frac{7}{2^x} \Rightarrow 2^x = \frac{7}{5} \cdot 2 = \frac{14}{5}$ da cui

$$2^x = \frac{14}{5} \Rightarrow x = \log_2(\frac{14}{5})$$

ESERCIZIO 2

$$\log_2(x-1) = 3$$

ricordando che: $\log_2 2 = 1$ facciamo in modi di avere il logaritmo con la stessa base anche al secondo membro:

$$\log_2(x-1) = 3 \cdot \log_2 2$$

Per la regola sui logaritmi relativa alle potenze, avremo:

$$\log_2(x-1) = \log_2(2^3)$$

Poiché ad ambo i membri, abbiamo logaritmi con la stessa base, possiamo eguagliare gli argomenti, facendo sparire i logaritmi:

$$(x-1) = (2^3) = 8$$

$$x = 8 + 1 = 9 \Rightarrow x = 9$$

ESERCIZIO 3

$$\log\ (x-2) + \log 5 = \log x$$

la somma di due logaritmi è uguale al logaritmo del prodotto dei loro argomenti:

$$\log[(x-2)(5)] = \log x$$

$$\log[5x-10] = \log x$$

Poiché ad ambo i membri, abbiamo logaritmi con la stessa base, possiamo eguagliare gli argomenti, facendo sparire i logaritmi:

$$5x - 10 = x$$

$$4x = 10 \Rightarrow x = \frac{5}{2}$$

ESERCIZIO 4

$2\log_2 x = 2 + \log_2(x+3)$ facciamo in modo di avere tutti logaritmi:

$$2\log_2 x = 2\log_2 2 + \log_2(x+3)$$

Per la regola sui logaritmi relativa alle potenze, avremo:

$$\log_2 x^2 = \log_2 2^2 + \log_2(x+3)$$

la somma di due logaritmi è uguale al logaritmo del prodotto dei loro argomenti:

$$\log_2 x^2 = \log_2(4 \cdot (x+3))$$

Poiché ad ambo i membri, abbiamo logaritmi con la stessa base, possiamo eguagliare gli argomenti, facendo sparire i logaritmi:

$x^2 = 4x + 12$ da cui:

$$x^2 - 4x - 12 = 0$$

Questa è una equazione di secondo grado avente le due soluzioni:

$$\cancel{x_1 = -2}$$
$$x_2 = 6$$

La prima è da escludere in quanto non rispetta la condizione x>0 (data dal primo logaritmo della traccia)

ESERCIZIO 5 (metodo della sostituzione)

$$3^x + 3^{1-x} = 4$$

$$3^x + 3^1 \cdot \frac{1}{3^x} = 4$$ poniamo adesso: $3^x = t$

La nostra equazione diventa:

$$t + 3 \cdot \frac{1}{t} = 4$$ moltiplicando tutto per t, avremo

$$t^2 + 3 = 4t$$ cioè

$$t^2 - 4t + 3 = 0$$ che è una equazione di secondo grado che risolta dà:

$$t_1 = 3$$
$$t_2 = 1$$

Ricordando che : $3^x = t$

Avremo le due equazioni:

$$3^x = 3$$
$$3^x = 1$$

Da cui le soluzioni cercate:

$$x = 0$$
$$x = 1$$

<u>ESERCIZIO 6 (metodo della sostituzione)</u>

$$4^x = 2^x - 2$$

$$4^x - 2^x + 2 = 0$$

$$2^{2x} - 2^x + 2 = 0$$ poniamo la sostituzione $2^x = t$

$t^2 - t + 2 = 0$ che è una equazione di secondo grado che non ha soluzioni in quanto il delta è negativo.

Il nostro esercizio, quindi avrà come risultato l'insieme vuoto.