Dispense di Matematica
classe quinta
1-Gli integrali

π

Ing. Alessandro Pochì

(Appunti di lezione svolti all'ITIS M.M.Milano)

Aggiornamento al 8 gennaio 2015

IL PROBLEMA DEL CALCOLO DELLE AREE .

Spesso per risolvere svariati problemi sia di matematica ma anche di altre discipline, occorre determinare una superficie.

Fino a quando queste superfici sono delimitate da una curva spezzata, ma con lati rettilinei, il tutto è abbastanza semplice potendo utilizzare le formule geometriche note sin dalle scuole elementari (Triangolo, rettangolo, quadrato, trapezio ecc,).

L'unica altra superficie facilmente calcolabile (anche se non delimitata da lati rettilinei) è quella della circonferenza.

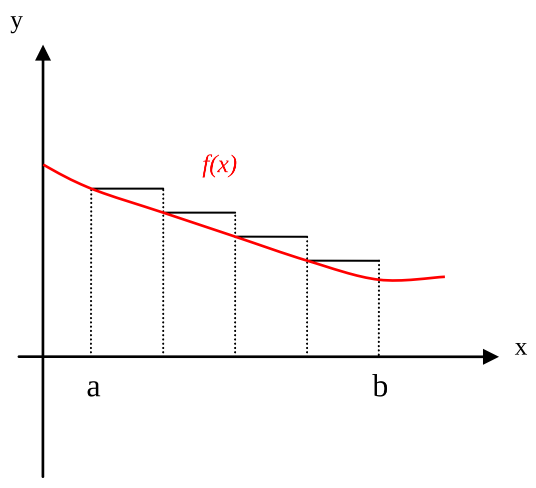
Per tutte le altre, delimitate dal grafico di una funzione, le suddette formule non sono più sufficienti.

Un metodo, approssimato, per determinare una superficie di questo tipo è quello di suddividerla in più parti, assimilabili a rettangoli.

Immaginiamo di voler determinare la Superficie A compresa tra l'asse delle x, la funzione e le due rette verticali passanti per a e b.

Nel grafico seguente, per esempio, sostituendo la superficie A con quella dei rettangoli, commetteremmo un errore per eccesso, in quanto l'area dei rettangoli è superiore a quella reale.

Calcolo delle Aree: Area superiore S



Se chiamiamo, questa superficie, calcolata per eccesso S, sicuramente potremo affermare che S>A.

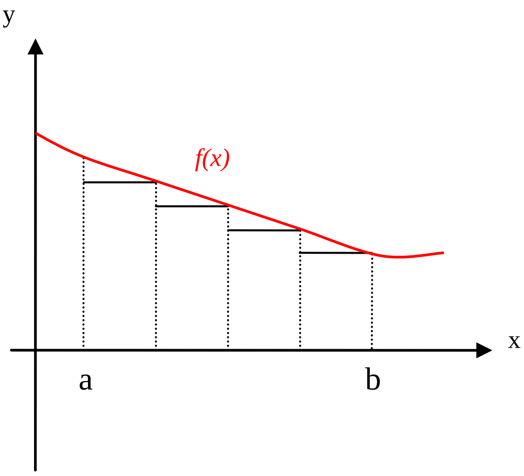
Da notare che ogni rettangolo ha la stessa base, ciò che cambia sarà la sua altezza che non è altro che il valore della funzione determinata per le varie ascisse.

Area "superiore"

$$S = \sum_{1}^{n} f(x)(b-a)/n$$

Se invece calcoliamo la superficie come nel grafico seguente, commettiamo un errore per difetto:

Calcolo delle Aree: Area inferiore s



Se chiamiamo, questa superficie, calcolata per difetto s, sicuramente potremo affermare che s<A.

Area "inferiore"

$$s = \sum_{1}^{n} f(x)(b-a)/n$$

Una prima conclusione, quindi può essere la seguente:

$$s < A < S$$

Aumentando il numero dei rettangoli, si ridurrà sempre di più la differenza tra S ed s e quindi il calcolo della A diventerà sempre più accurato.

Al crescere (ipoteticamente all'infinito) del numero dei rettangoli, non vi sarà più alcuna differenza tra s ed S e quindi avremo risolto il problema della determinazione di A.

E' chiaro però che, non è ammissibile un'operazione del genere dove, seppur con dei semplici rettangoli, il numero delle operazioni da fare sarà infinito.

Ci affideremo, pertanto all'elaboratore elettronico, il quale in pochi secondi potrà determinare con straordinaria precisione l'area richiesta.

Per esempio, fissato un certo valore di *"n"* potremmo calcolare la superficie facendo la media aritmetica tra s ed S:

$$A = \frac{S+s}{2}$$

In seguito *(integrali definiti)* studieremo il modo per determinare in modo molto semplice la superficie A.

Gli integrali

Definizione di integrale indefinito

Si definisce integrale indefinito della funzione $f(x)$, e si indica con

$$\int f(x)dx = F(x) + c$$

l'insieme di tutte le primitive $F(x)$

per le quali risulta:

$$F^{'}(x) = f(x)$$

la funzione $f(x)$ è detta funzione integranda.

Le primitive $F(x)$ differiscono tra loro di una costante c.

Cos'è questa costante c ?

La spiegazione è semplice: poiché derivando la F(x) si deve ottenere la f(x), una qualsiasi costante viene a "sparire" quindi tutte le F(x) che differiscono di una costante rispettano la:

$$F^{'}(x) = f(x)$$

Esempio:

$F(x) = \frac{1}{3}x^3 + c$ E' una primitiva della funzione . $f(x) = x^2$

Ma lo è anche: $F(x) = \frac{1}{3}x^3 + 1$ e anche: $F(x) = \frac{1}{3}x^3 + 2$

Da ricordare che, quando si svolge un integrale indefinito, si ha come risultato una funzione e, come vedremo in seguito invece, svolgendo un integrale definito, avrò come risultato un numero che rappresenta una superficie.

Tabella integrali immediati	Osservazioni
$\int dx = x + c$	
$\int kx dx = k \int x dx + c$	L'integrale del prodotto di una funzione per una costante è uguale alla costante per l'integrale della funzione.
$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c$	Facendo l'integrale di una potenza, la primitiva aumenta di grado. (Il contrario accadeva derivando).
$\int \frac{1}{x} dx = \log\lvert x\rvert + c$	
$\int e^x dx = e^x + c$	.
$\int a^x dx = \frac{a^x}{\log(a)} + c$	Se $a = e$ si ricade nella regola precedente
$\int sen(x) dx = -\cos(x) + c$	
$\int \cos(x) dx = sen(x) + c$	
$\int \frac{1}{\cos^2(x)} dx = tg(x) + c$	
$\int \frac{1}{1+x^2} dx = arctg(x) + c$	
Alcune regole di integrazione	**Osservazioni**
$\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \log\lvert f(x)\rvert + c$	Da utilizzare quando al numeratore abbiamo la derivata della funzione al denominatore.
$\int sen(f(x)) \cdot f'(x) dx = -\cos(f(x)) + c$	
$\int \cos(f(x)) \cdot f'(x) dx = sen(f(x)) + c$	

Definizione di integrale definito

Si definisce integrale definito della funzione $f(x)$, nell'intervallo [a,b] il valore così calcolato:

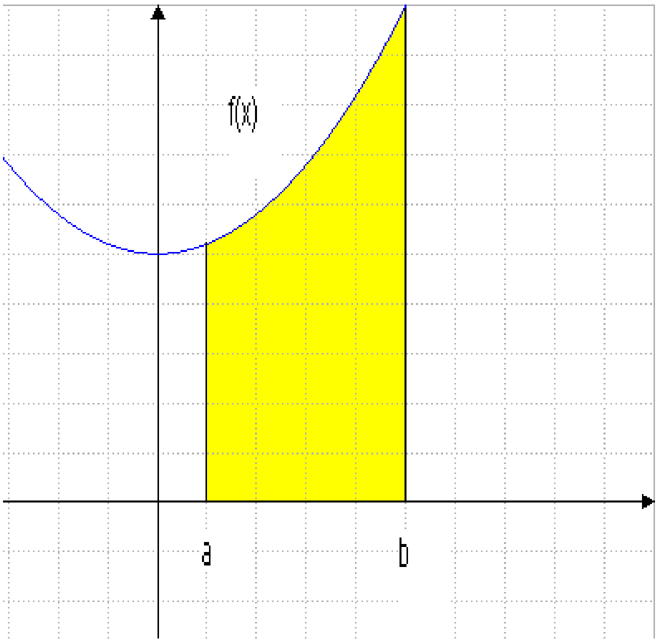
$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

a,b sono gli *"estremi di integrazione"*

f(x) è la "f*unzione integranda"*

Il valore risultante di tale operazione di integrazione rappresenta la superficie compresa tra:

- L'asse delle ascisse
- Le due rette verticali di equazione *x=a e x=b*
- La funzione *f(x)*



Per quanto detto sinora, gli integrali definiti possono essere utilizzati per il calcolo delle aree. Molto interessante è il caso in cui si debba determinare una superficie compresa tra due funzioni.

Regole elementari sugli integrali definiti

$$\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$$ [invertendo gli estremi di integrazione varia il segno dell'integrale]

$$\int_a^a f(x)dx = 0$$ [Se gli estremi coincidono, l'integrale è nullo]

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$ [c è un punto interno all'intervallo [a,b]

Come si risolve un integrale definito

Prima di tutto risolviamo l'integrale come se fosse indefinito e poi sostituiamo con una differenza i valori degli estremi di integrazione:

$$S = \int_1^2 x^3 dx = F(2) - F(1)$$

$$F(x) = \left[\frac{x^4}{4}\right]$$

$$S = \left[\frac{x^4}{4}\right]_1^2 = \left[\frac{2^4}{4} - \frac{1^4}{4}\right] = \left[\frac{16}{4} - \frac{1}{4}\right] = \frac{15}{4}$$

INTEGRAZIONE DI FUNZIONI RAZIONALI FRATTE .

Supponiamo di avere un integrale del tipo:

$$\int \frac{ax+b}{ax^2+bx+c}dx$$

Con l'equazione al denominatore con due soluzioni reali x_1 e x_2

Per risolvere questo tipo di integrale, se escludiamo il caso in cui al numeratore vi sia la derivata del numeratore (ricade nel caso precedente del logaritmo) dobbiamo trasformare la frazione in questo modo:

$$\int \frac{ax+b}{ax^2+bx+c}dx = \int \frac{A}{(x-x_1)} + \frac{B}{(x-x_2)}dx$$

dove x_1 e x_2 sono le due radici dell'equazione di secondo grado al denominatore.

Esempio

$$\int \frac{3x-2}{x^2-9}dx$$

Risolvendo l'equazione di secondo grado al denominatore avremo: $X_1=3$, $X_2=-3$

Quindi

$$\int \frac{3x-2}{x^2-9}dx = \int \frac{A}{(x-3)} + \frac{B}{(x+3)}dx$$

Calcolando il minimo comune multiplo nel secondo integrale, avremo:

$$\frac{A}{(x-x_1)} + \frac{B}{(x-x_2)} = \frac{A(x+3)+B(x-3)}{(x+3)(x-3)} = \frac{Ax+3A+Bx-3B}{(x+3)(x-3)} = \frac{x(A+B)+(3A-3B)}{(x+3)(x-3)}$$

Quindi

$$\int \frac{3x-2}{x^2-9}dx = \int \frac{x(A+B)+(3A-3B)}{(x+3)(x-3)}dx$$

Affinche l'eguaglianza sia rispettata dovremo avere:

$$(3x-2)=x(A+B)+(3A-3B)$$

cioè:

$$\begin{cases}(A+B)=3\\(3A-3B)=-2\end{cases}$$

Risolvendo questo semplice sistema otterremo le costanti:

$$\begin{cases}A=\dfrac{7}{6}\\B=\dfrac{11}{6}\end{cases}$$

Avremo quindi l'eguaglianza:

$$\int\frac{3x-2}{x^2-9}dx=\int\frac{\frac{7}{6}}{(x-3)}+\frac{\frac{11}{6}}{(x+3)}dx$$

Che, scritta in modo più semplice, dà:

$$\int\frac{3x-2}{x^2-9}dx=\frac{7}{6}\int\frac{1}{(x-3)}+\frac{11}{6}\int\frac{1}{(x+3)}dx$$

Adesso, entrambi gli integrali al secondo membro sono risolvibili con la semplice regola del logaritmo:

$$F(x)=\frac{7}{6}\log|x-3|+\frac{11}{6}\log|x+3|+c$$

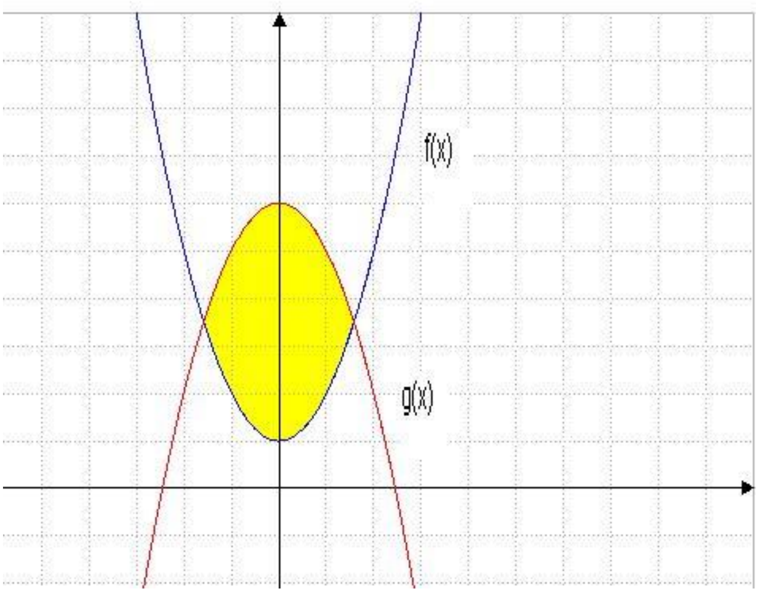
Calcolo di una superficie compresa tra due funzioni f(x) e g(x)

Il problema è di facile soluzione: basta calcolare il seguente integrale:

$$A=\int_a^b [f(x)-g(x)]dx$$

Per determinare gli estremi di integrazione *a* e *b,* dobbiamo risolvere il sistema:

$$\begin{cases} y=f(x) \\ y=g(x) \end{cases}$$



Esercizio svolto:

Determinare la superficie compresa tra le due funzioni di equazione:

$$\begin{cases} f(x)=-x^2+6x \\ g(x)=x^2-4x \end{cases}$$

Risolvendo il sistema determiniamo i punti di intersezione tra le due funzioni e quindi gli estremi di integrazione:

$$\begin{cases} -x^2+6x=x^2-4x \\ f(x)=g(x) \end{cases}$$

$$-2x^2+10x=0$$

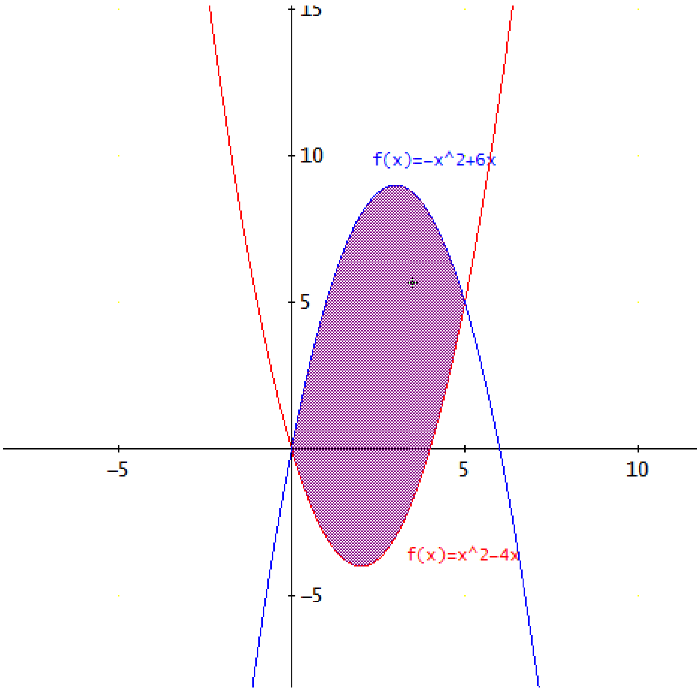
$$\begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 5 \end{cases}$$ *(questi sono gli estremi di integrazione)*

$$A = \int_a^b [f(x) - g(x)]dx$$

diventa quindi:

$$A = \int_0^5 [-2x^2 + 10x]dx$$

$$A = \left[-\frac{2x^3}{3} + \frac{10}{2}x^2 \right]_0^5 = \left[-\frac{2 \cdot 5^3}{3} + 5 \cdot 5^2 \right] - \left[-\frac{2 \cdot 0^3}{3} + \frac{10}{2}0^2 \right] = \frac{125}{3}$$



Definizione di integrale improprio

Nello svolgere un integrale potrebbe accadere che la funzione f(x) non sia continua nell'intervallo [a,b] oppure che abbia come estremi i valori $\pm\infty$.

In tali casi si ha un *integrale improprio*.

Possono essere presenti diverse tipologie di integrale improprio:

1) La discontinuità si trova in uno degli estremi dell'intervallo [a,b]
2) La discontinuità si trova all'interno dell'intevallo [a,b]
3) La funzione ha come uno o entrambi gli estremi il valore $\pm\infty$

Caso 1: La discontinuità si trova in uno degli estremi dell'intervallo [a,b]

Supponiamo che nell'estremo *a* la funzione *f(x)* non sia definita. In questo caso, nello svolgere l'integrale:

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

Non potremmo calcolare il valore F(a).

La funzione però sarà continua in un intorno (destro) di *a*, e quindi nell'intervallo:

$$[(a+\delta),b]$$

La soluzione del problema si ricava facendo tendere a zero il valore di $[\delta]$:

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\delta\to 0} \int_{a+\delta}^b f(x)dx$$

Se dovesse accadere che tale limite non esiste, diremo che "La funzione non è integrabile in [a,b].

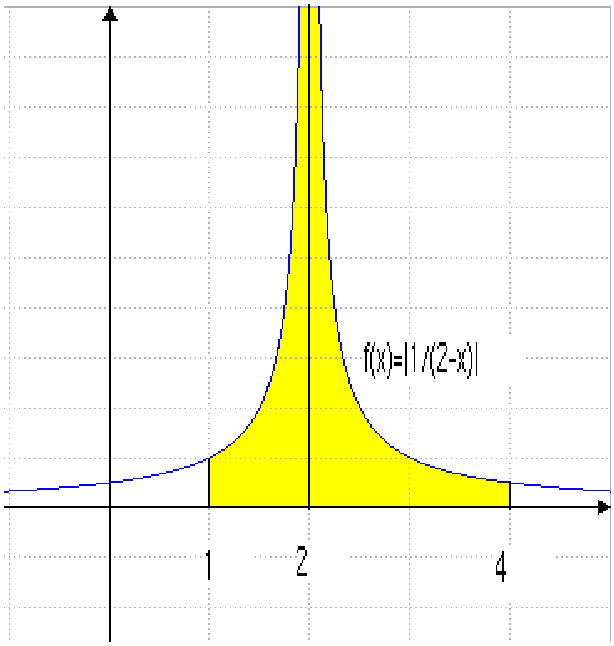
Caso 2: La discontinuità si trova all'interno dell'intevallo [a,b]

Supponiamo che un punto c, interno all'intervallo [a,b] sia sede di una discontinuità.

In questo caso facendo un ragionamento analogo al precedente, dobbiamo "spezzare" il nostro integrale in due parti a sinistra e a destra del punto c:

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\delta\to 0}\int_a^{c-\delta} f(x)dx + \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{c+\varepsilon}^{b} f(x)dx$$

Nel grafico seguente, ad esempio, la funzione non è definita nel punto 2.



Naturalmente, anche in questo caso, se dovesse accadere che tali limiti non esistono, diremo che "La funzione non è integrabile in [a,b].

Caso 3: Uno degli estremi di integrazione è pari a $\pm\infty$

In questo caso sostituiamo all'estremo in questione la variabile δ ed avremo:

$$\int_a^{\infty} f(x)dx = \lim_{\delta\to\infty}\int_a^{\delta} f(x)dx$$

Teorema del valor medio

Ipotesi: f(x) è una funzione continua in un intervallo [a,b]

Tesi: Allora esisterà un punto $c \in [a,b]$ per il quale risulta:

$$\int_a^b f(x)dx = (b-a) \cdot f(c)$$

Il teorema, dice, in pratica che possiamo eguagliare l'area curvilinea con l'area di un rettangolo avente come base l'intervallo [a,b] e come altezza il valore della funzione f(x) calcolato in un determinato punto *c*.

Esempio 1

Determinare il valor medio per la funzione: $f(x) = x^2$ nell'intervallo [2,3]

Per la definizione avremo:

$$\int_2^3 x^2 dx = (3-2) \cdot f(c)$$

$\left[\frac{x^3}{3}\right]_2^3 = 1 \cdot f(c)$ da cui $f(c) = \left[\frac{3^3}{3} - \frac{2^3}{3}\right] = \left[9 - \frac{8}{3}\right] = \frac{19}{3}$

Quindi: $f(c) = \frac{19}{3}$

Per trovare il valore di *c* poniamo:

$x^2 = \frac{19}{3}$ da cui $x = \pm\sqrt{\frac{19}{3}}$

Ricordando che possiamo utilizzare esclusivamente il valore ricadente nell'intervallo [a,b], la soluzione sarà:
$c = +\sqrt{\frac{19}{3}} \in [2,3]$

Esempio 2

Determinare il valor medio per la funzione: $f(x) = x^2 - 6x + 5$ nell'intervallo [6,8]

Per la definizione avremo:

$$\int_2^3 x^2 - 6x + 5dx = (8-6) \cdot f(c)$$

$$\left[\frac{x^3}{3} - \frac{6}{2}x^2 + 5x\right]_6^8 = 2 \cdot f(c)$$ da cui

$$f(c) = \frac{1}{2}\left\{\left[\frac{8^3}{3} - \frac{3}{2}8^2 + 5 \cdot 8\right] - \left[\frac{6^3}{3} - \frac{3}{2}6^2 + 5 \cdot 6\right]\right\} = \frac{1}{2} \cdot \frac{74}{3} = \frac{37}{3}$$

Quindi: $f(c) = \frac{37}{3}$

Per trovare il valore di *c* poniamo:

$x^2 - 6x + 5 = \frac{37}{3}$ da cui , risolvendo l'equazione di secondo grado:

$$\begin{cases} x_1 = 7{,}04 \\ x_2 = -1{,}04 \end{cases}$$

Ricordando che possiamo utilizzare esclusivamente il valore ricadente nell'intervallo [a,b], la soluzione sarà:
$c = 7{,}04 \in [7{,}8]$

Calcolo della lunghezza di un arco di curva

Gli integrali definiti possono anche essere utilizzati per determinare la lunghezza di una curva tra due determinati punti:

$$l_{a,b} = \int_a^b \sqrt{1+\left[f'(x)\right]^2}\, dx$$

Calcolo della superficie esterna di un solido di rotazione

Altra applicazione è quella del calcolo della superficie esterna di un *solido di rotazione* che si ottiene facendo ruotare la funzione intorno all'asse x. In questo caso la superficie sarà così calcolata:

$$S_{a,b} = 2\pi \int_a^b f(x) \cdot \sqrt{1+\left[f'(x)\right]^2}\, dx$$

Calcolo volume di un solido di rotazione

La determinazione del volume del solido di rotazione sarà:

$$V_{a,b} = \pi \int_a^b \left[f(x)\right]^2 dx$$