Dispense di Matematica
classe terza
Parabola ed ellisse

Ing. Alessandro Pochì

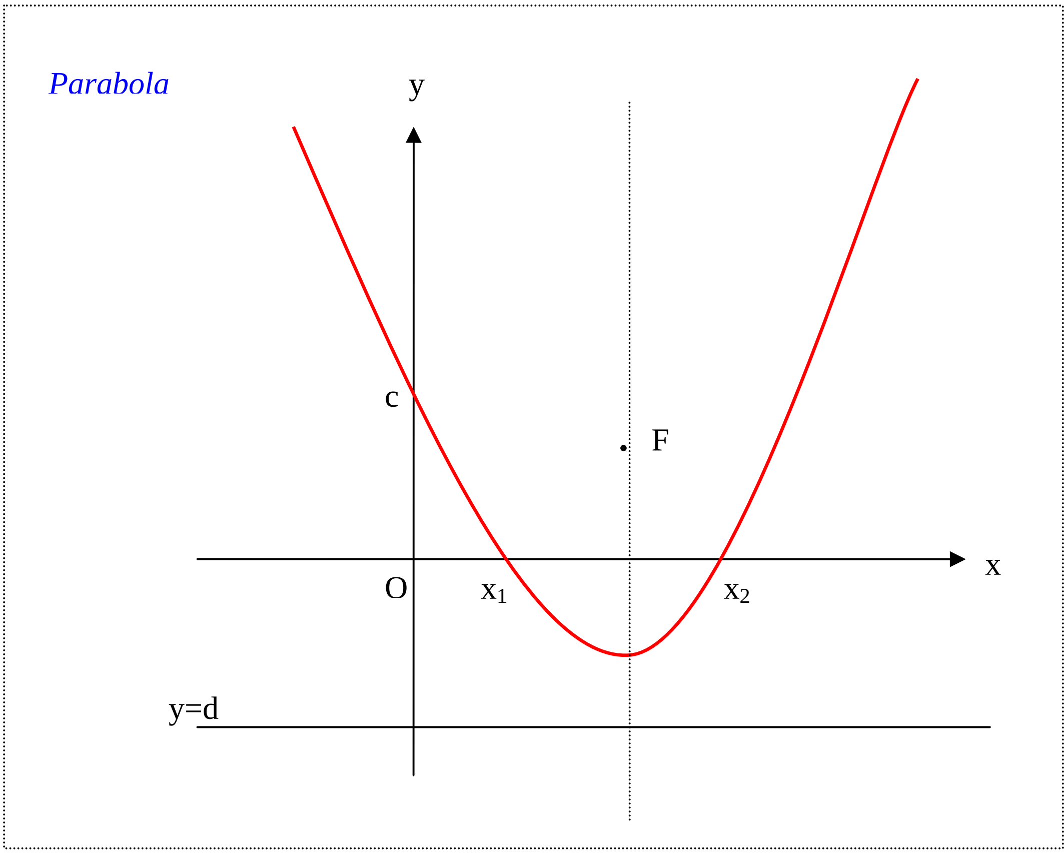
(Appunti di lezione svolti all'ITIS M.M.Milano)

Aggiornamento al 25 Marzo 2013

La parabola .

Definizione: si definisce parabola, l'insieme dei punti del piano che hanno la stessa distanza da un punto fisso detto fuoco e da una retta detta direttrice.
L'equazione della parabola è rappresentata da una equazione di secondo grado con coefficienti a,b,c:

$$y = ax^2 + bx + c$$



Parametri:
c è il termine noto e rappresenta il punto di intersezione della parabola con l'asse y
F è il *fuoco* della parabola
y=d è l'equazione della retta *direttrice*
x_1 ***e*** x_2 rappresentano i punti di intersezione con l'asse x e vengono detti "radici", Non sempre esistono in quanto la parabola potrebbe non intersecare l'asse x.

Determinazione delle due radici x_1 ***e*** x_2
I valori di x_1 ***e*** x_2 vengono calcolati risolvendo la seguente espressione:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt[2]{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Il valore $\Delta = b^2 - 4ac$ è detto discriminante (o delta) . Affinchè x_1 ***e*** x_2 esistano è necessario che esso non sia negativo.

Al variare quindi, dei coefficienti a,b,c, possono presentarsi sei diversi casi, tre con a>0 e tre con a<0:

a>0 (la parabola è concava)

$\Delta > 0 \Rightarrow$ abbiamo due radici reali e distinte x_1 **e** x_2

$\Delta < 0 \Rightarrow$ non abbiamo radici reali e la parabola non intersecherà l'asse x

$\Delta = 0 \Rightarrow$ abbiamo due radici ma coincidenti $x_1 = x_2$ *quindi la parabola "tocca" l'asse x in un solo punto*

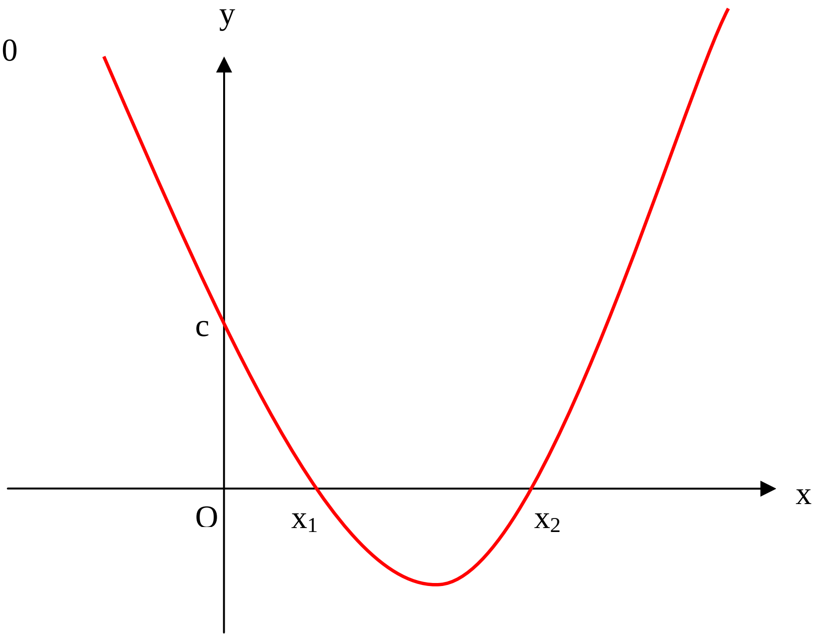
a<0 (la parabola è convessa)

$\Delta > 0 \Rightarrow$ abbiamo due radici reali e distinte x_1 **e** x_2

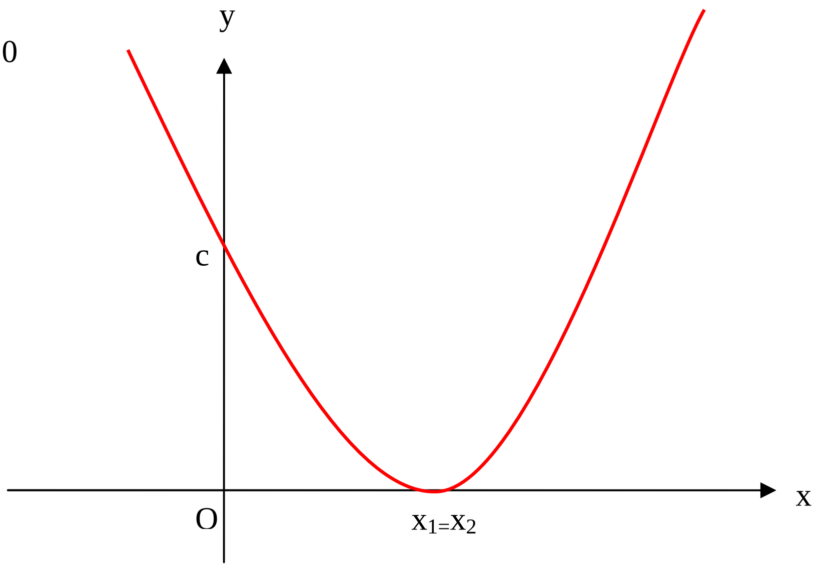
$\Delta < 0 \Rightarrow$ non abbiamo radici reali e la parabola non intersecherà l'asse x

$\Delta = 0 \Rightarrow$ abbiamo due radici ma coincidenti $x_1 = x_2$ *quindi la parabola "tocca" l'asse x in un solo punto*

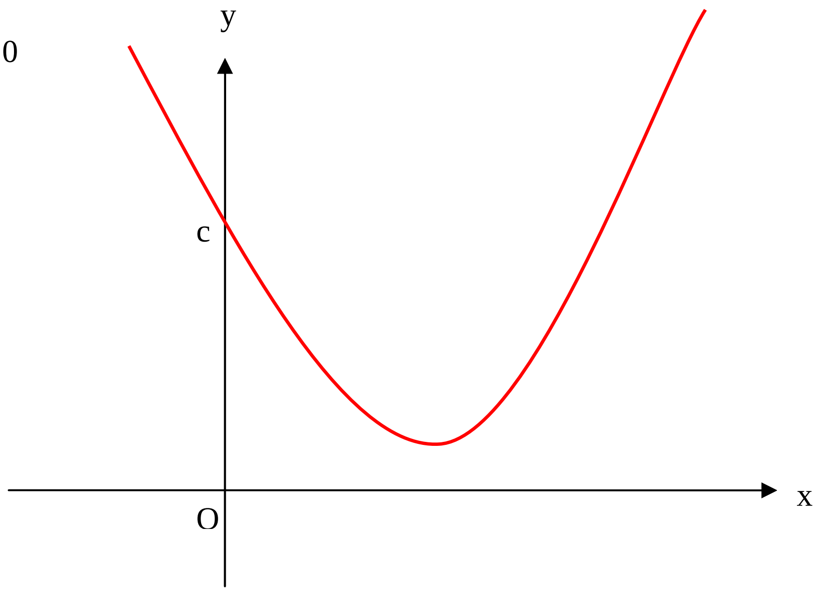
Caso con
a>0 e $\Delta > 0$



Caso con
a>0 e $\Delta = 0$



Caso con
a>0 e $\Delta < 0$



L'ellisse .

Si definisce ellisse, l'insieme dei punti per i quali è costante la somma delle distanze da due punti fissi detti Fuochi.
Potremmo interpretare, in linea di massima, un'ellisse come una circonferenza particolare che al posto di un centro ne ha due: appunto i fuochi. In particolare si avrà una circonferenza quando i due fuochi coincidono (vedremo in seguito le condizioni).

L'equazione dell'ellisse è di secondo grado:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

a e *b* sono chiamati semiasse maggiore e semiasse minore e rappresentano i punti dove l'ellisse interseca gli assi cartesiani.

Se i due semiassi sono uguali a=b, invece dell'ellisse abbiamo una circonferenza.

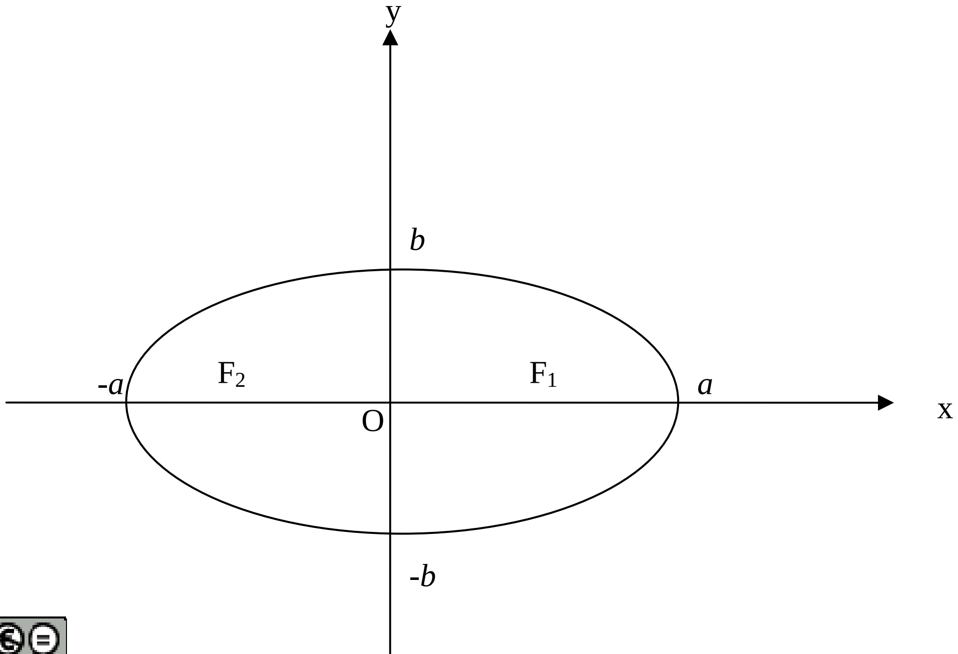
L'eccentricità di una ellisse è un valore compreso tra zero e 1 e rappresenta quanto l'ellisse è "schiacciata".

$$0 \le e < 1$$

Si ha *e=0* nel caso di una circonferenza.

Se *a>b* l'ellisse si dice "orizzontale" ed i fuochi sono sull'asse x, se viceversa *a<b* l'ellisse si dice "verticale" ed i fuochi sono sull'asse y.

<u>Caso con *a>b*</u>

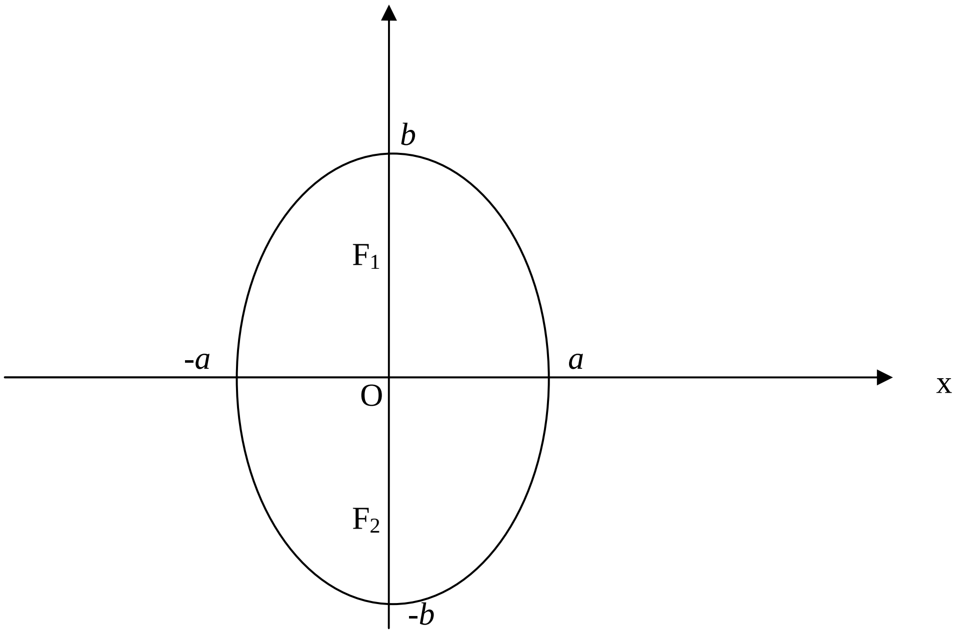


L'ellisse è ad asse orizzontale e i fuochi hanno coordinate;

$F_1(c,0)$; $F_2(-c,0)$ con : $c = \sqrt{a^2 - b^2}$

L'eccentricità si calcola con la relazione: $e = \frac{c}{a}$

<u>Caso con *a*<*b*</u>

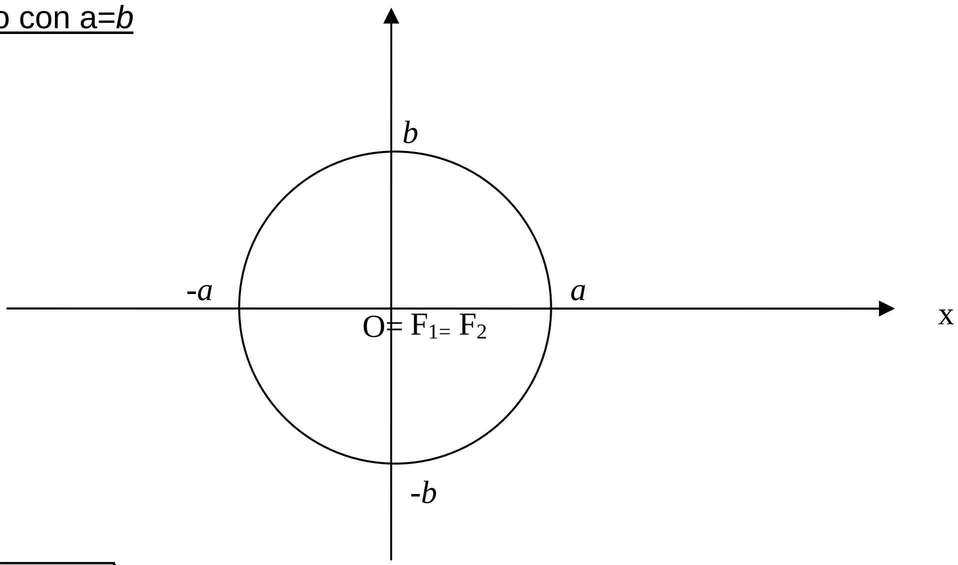


L'ellisse è ad asse verticale e i fuochi hanno coordinate;

$F_1(0,c)$; $F_2(0,-c)$ con : $c = \sqrt{b^2 - a^2}$

L'eccentricità si calcola con la relazione: $e = \frac{c}{b}$

<u>Caso con a=*b*</u>



L'ellisse è una circonferenza;

$F_1(0,0)$; $F_2(0,0)$ con : $c=\sqrt{a^2-b^2}=0$

L'eccentricità è, in questo caso: *e=0*

<u>Come si "risolve " un'ellisse</u>

Risolvere un'ellisse significa, data la sua equazione, determinare i semiassi, le coordinate dei fuochi e la sua eccentricità.

<u>*Esempio ellisse ad asse orizzontale*</u>

Risolvere l'ellisse: $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$

$a^2=9 \Rightarrow a=\pm 3$ (semiassi maggiori)

$b^2=4 \Rightarrow b=\pm 2$ (semiassi minori)

Poiché a>b, avremo: $c=\sqrt{a^2-b^2}$ $\quad c=\sqrt{9-4}=\sqrt{5}$ (fuochi sull'asse x)

Per i fuochi avremo quindi che : $F_1(c,0)$; $F_2(-c,0)$ diventano: $F_1(\sqrt{5},0); F_2(-\sqrt{5},0)$

L'eccentricità vale: $e=\frac{c}{a}$ quindi $e=\frac{\sqrt{5}}{3}=0,745$

<u>*Esempio ellisse ad asse verticale*</u>

Risolvere l'ellisse: $\frac{x^2}{1}+\frac{y^2}{16}=1$

$a^2=1 \Rightarrow a=\pm 1$ (semiassi maggiori)

$b^2=16 \Rightarrow b=\pm 4$ (semiassi minori)

Poiché a<b, avremo: $c=\sqrt{b^2-a^2}$ $\quad c=\sqrt{16-1}=\sqrt{15}$ (fuochi sull'asse x)

Per i fuochi avremo quindi che : $F_1(0,c)$; $F_2(0,-c)$ diventano: $F_1(0,\sqrt{15}); F_2(0,-\sqrt{15})$

L'eccentricità vale: $e=\frac{c}{b}$ quindi $e=\frac{\sqrt{15}}{4}=0,968$