Dispense di Matematica
classe quarta
Limiti e derivate

π

Ing. Alessandro Pochì

(Appunti di lezione svolti all'ITIS M.M.Milano)

Aggiornamento al 13 maggio 2014

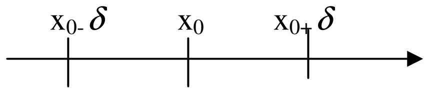
Indice

Definizione di Intorno di un punto

Consideriamo un punto X_0. Si definisce intorno del punto X_0 di raggio δ l'insieme:

$$]x_0 - \delta, x_0 + \delta[$$

Creare un intorno del punto X_0 equivale a puntare un compasso nel punto X_0 e, con raggio δ, trovare i punti X_0- δ e X_0+ δ



Esempio: L'intorno del punto 5 di raggio 2, è costituito dall'insieme:

$$]3,7[$$

Infatti: se X_0=5, risulta:
X_0-2=5-2=3 e X_0+2=5+2=7

Poiché il raggio δ può essere scelto piccolo a piacere, dire "prendiamo un punto nell'intorno di X_0" può significare "prendiamo un punto molto vicino a X_0".

Concetto di limite

Nei normali calcoli che eseguiamo per determinare il valore di una funzione, siamo obbligati ad escludere quei valori che stanno al difuori del campo di esistenza. Proprio in questi punti, però, spesso accadono comportamenti molto interessanti e che vorremmo esaminare.
Poiché *NON POSSIAMO* fare una semplice sostituzione, perché, per esempio, avremmo una divisione per zero, ricorriamo ai limiti.
Diremo quindi che calcoliamo il valore di una funzione NON nel punto x=0 ma, per esempio, per il valore di X che *tende* a zero.
Facciamo un esempio considerando la funzione:

$$f(x) = \frac{1}{x}$$

Questa funzione ha, come campo di esistenza, tutti i valori dell'asse x escluso il punto x=0.
Sarebbe quindi impossibile andare a calcolare il valore f(0) perché otterremmo una divisione non accettabile.
Ricorriamo quindi ai limiti calcolando "*Il limite della funzione 1/x per x che tende a zero*"

$$\lim_{x \to 0} \frac{1}{x}$$

Vediamo che cosa accade, quando i valori della variabile x si avvicinano al punto zero, cioè quando utilizziamo dei valori compresi in un "intorno di zero".
Per tale motivo realizziamo una tabella:

Avviciniamoci allo zero iniziando dalla parte negativa: (cioè da sinistra)

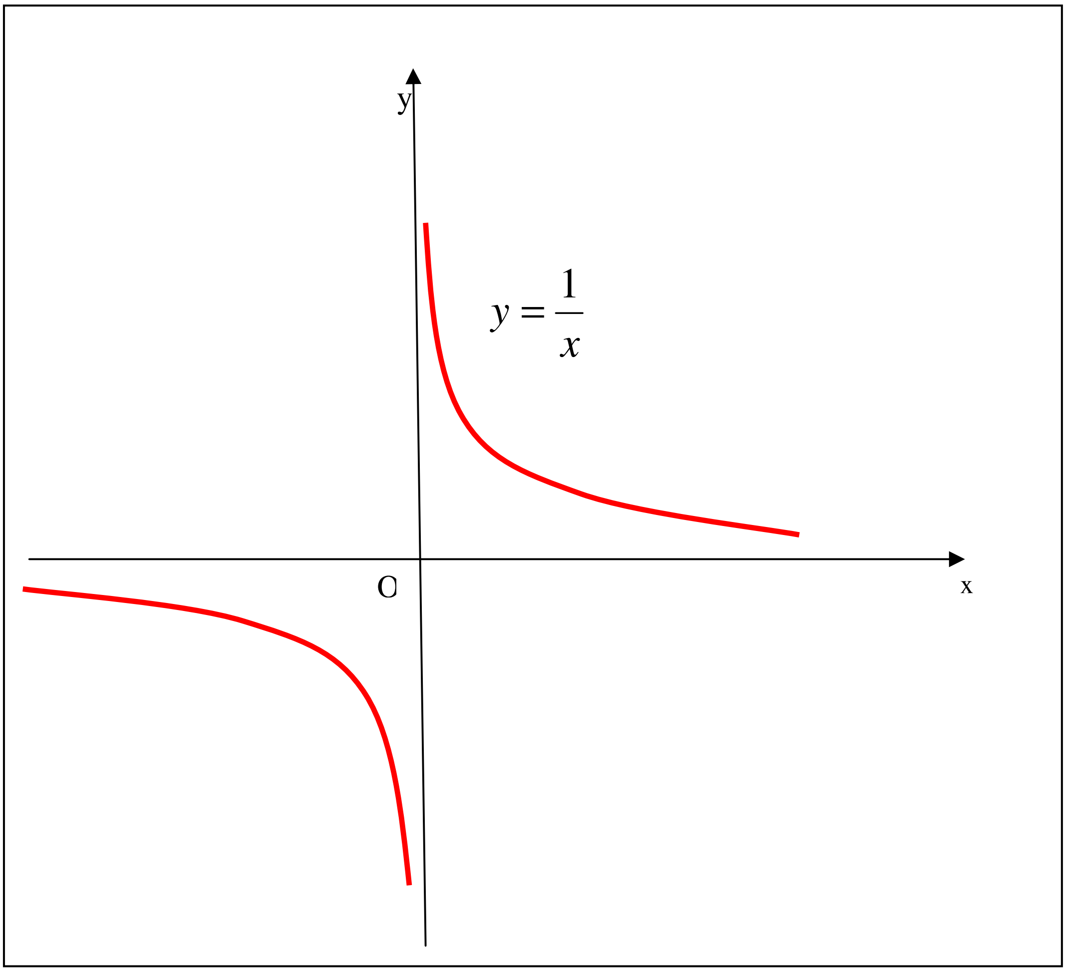
x	-3	-2	-1	-0,5	-0,25	-0.125	-0,0625	-,00312	0,015
1/x	-0,3333	-0,50	-1	-2	-4	-8	-16	-32	-64

Avviciniamoci allo zero iniziando dalla parte positiva: (cioè da destra)

x	0,015	0,0312	0,0625	0,125	0,25	0,50	1	2	3
1/x	64	32	16	8	4	2	1	0,50	0,3333

Vediamo che nella prima tabella mentre la x *tende* a zero, la y diminuisce rapidamente.
Nella seconda invece, mentre la x *tende* a zero, la y aumenta altrettanto rapidamente.
Avvicinandoci ulteriormente al punto zero, sia da destra che da sinistra, la funzione tenderà ad infinito sia in senso positivo che negativo.

Rappresentando su di un grafico tutte queste coppie di punti, otterremo:



Come si vede chiaramente, al punto di ascissa x=0 la funzione fa corrispondere +∞ dalla parte destra e -∞ dalla parte sinistra.
Ciò significa che possiamo definire

Limite destro:

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$$

Limite sinistro

$$\lim_{x \to 0-} \frac{1}{x} = -\infty$$

Dopo aver descritto, quindi i limiti, dal punto di vista pratico, vediamo adesso di scriverne la definizione in modo più rigoroso:

Definizione di limite finito

Si dice che il limite per x che tende a x_0 è uguale a l, e si scrive:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = l$$

Quando, fissato un valore di $\varepsilon > 0$ risulta che, per ogni valore di x appartenente ad un intorno di x_0 ,

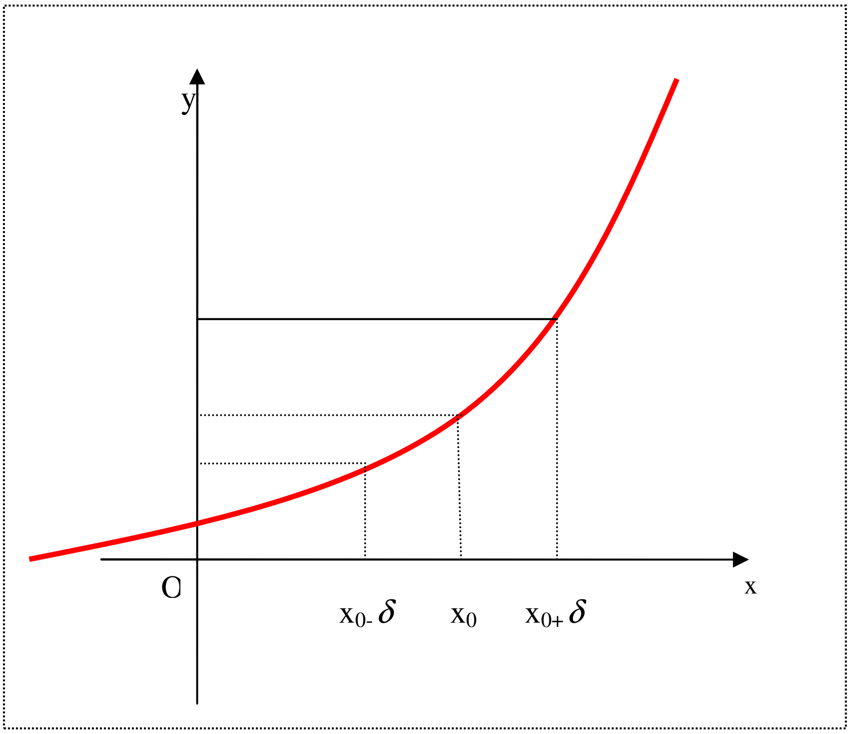
$$x \in \left]x_0 - \delta, x_0 + \delta\right[$$

Risulta:

$$l - \varepsilon < f(x) < l + \varepsilon$$

In pratica, ad ogni valore di x che appartiene all'intorno di x_0, (siamo sull'asse delle x) corrisponde un valore della funzione che sta in un intorno di ε (siamo sull'asse y).

Ecco il grafico:



Le forme indeterminate

Nel calcolo di alcuni limiti può accadere di trovarsi di fronte a forme del tipo:

$$\frac{\infty}{\infty}, \frac{0}{0}, \infty \cdot 0, \infty - \infty$$

Tali forme vengono dette *indeterminate (o F.I.)* in quanto solo trasformando le funzioni che le hanno generate potremo riuscire a risolverle.
A secondo del tipo di indeterminazione, la metodologia di risoluzione varia.

In caso di difficoltà, comunque, (nei primi due casi) potremo utilizzare la regola di De L'Hopital.

Caso 1 : forma indeterminata $\frac{\infty}{\infty}$ (polinomio al numeratore di grado superiore)

Questo tipo di indeterminazione si elimina mettendo in evidenza sia nel polinomio al numeratore che nel polinomio al denominatore, la variabile x con la potenza più elevata.

Esempio:

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{x^3 + x^2 - 1}{5x^2 + 3x}$$

Andando a svolgere il limite otteniamo la F.I. $\frac{\infty}{\infty}$

La potenza più elevata del polinomio al numeratore è x^3
La potenza più elevata del polinomio al denominatore è x^2

Mettiamo quindi in evidenza:

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{x^3(\frac{x^3}{x^3} + \frac{x^2}{x^3} - \frac{1}{x^3})}{x^2(5\frac{x^2}{x^2} + 3\frac{x}{x^2})}$$

e, andando a semplificare otteniamo:

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{x(1 + \frac{1}{x} - \frac{1}{x^3})}{(5 + \frac{3}{x})}$$

Se svolgiamo adesso il limite, tutte le frazioni con x al denominatore, spariranno, in quanto tendenti a zero:

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{x(1 + \frac{1}{x} - \frac{1}{x^3})}{(5 + \frac{3}{x})} = \infty$$

Caso 2 : forma indeterminata $\frac{\infty}{\infty}$ (polinomi al numeratore e denominatore di pari grado)

Anche in questo caso l'indeterminazione si elimina mettendo in evidenza sia al numeratore che al denominatore, la variabile x con la potenza più elevata.

Esempio:

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{10x^3 + x^2 - 1}{5x^3 + 6x}$$

Andando a svolgere il limite otteniamo la F.I. $\frac{\infty}{\infty}$

La potenza più elevata al numeratore è x^3
La potenza più elevata al denominatore è x^3

Mettiamo quindi in evidenza:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^3(10\frac{x^3}{x^3}+\frac{x^2}{x^3}-\frac{1}{x^3})}{x^3(5\frac{x^3}{x^3}+6\frac{x}{x^3})}$$

e, andando a semplificare otteniamo:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{(10+\frac{1}{x}-\frac{1}{x^3})}{(5+\frac{6}{x^2})}$$

Se svolgiamo adesso il limite, tutte le frazioni con x al denominatore, spariranno, in quanto tendenti a zero:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{(10+\frac{1}{x}-\frac{1}{x^3})}{(5+\frac{6}{x^2})}=\frac{10}{5}=2$$

Caso 3 : forma indeterminata $\frac{\infty}{\infty}$ (polinomio al denominatore di grado superiore)

Anche in questo caso l'indeterminazione si elimina mettendo in evidenza sia al numeratore che al denominatore, la variabile x con la potenza più elevata.

Esempio:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{3x-1}{2x^3+3x}$$

Andando a svolgere il limite otteniamo la F.I. $\frac{\infty}{\infty}$

La potenza più elevata al numeratore è x
La potenza più elevata al denominatore è x^3

Mettiamo quindi in evidenza:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x(3\frac{x}{x}+\frac{1}{x})}{x^3(2\frac{x^3}{x^3}+3\frac{x}{x^3})}$$

e, andando a semplificare otteniamo:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{(3+\frac{1}{x})}{x^2(2+\frac{3}{x^2})}$$

Se svolgiamo adesso il limite, tutte le frazioni con x al denominatore, spariranno, in quanto tendenti a zero:

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{(3 + \frac{1}{x})}{x^2(2 + \frac{3}{x^2})} = \frac{3}{\infty} = 0$$

Da quanto visto nei seguenti tre casi, si intuisce che possiamo, in generale capire immediatamente il risultato del limite applicando la seguente regola:

- *"Se il polinomio al numeratore ha grado superiore rispetto al polinomio al denominatore, il risultato del limite sarà ∞ .*
- *Se il polinomio al numeratore ha grado inferiore rispetto al polinomio al denominatore, il risultato del limite sarà 0.*
- *Se il polinomio al numeratore e quello al denominatore sono di pari grado, il risultato del limite sarà un numero reale dato dal rapporto dei coefficienti dei termini di grado maggiore."*

Caso 4 : forma indeterminata $\frac{0}{0}$

La forma indeterminata in questione non può essere risolta con il metodo precedente, in quanto non efficace.
In questo caso dovremo utilizzare un metodo di scomposizione.

Esempio:

$$\lim_{x \to -3} \frac{x+3}{x^2 - 9} = \frac{0}{0}$$

Essendo il denominatore, un polinomio di secondo grado, (in questo caso una differenza di quadrati) troviamo i due zeri (+3 e -3) e riscriviamo il denominatore come prodotto di due binomi:

$$\lim_{x \to -3} \frac{\cancel{(x+3)}}{(x-3) \cdot \cancel{(x+3)}}$$

A questo punto, semplificando:

$$\lim_{x \to -3} \frac{(x+3)}{(x-3) \cdot (x+3)} = \lim_{x \to -3} \frac{1}{(x-3)} = -\frac{1}{6}$$

Le derivate

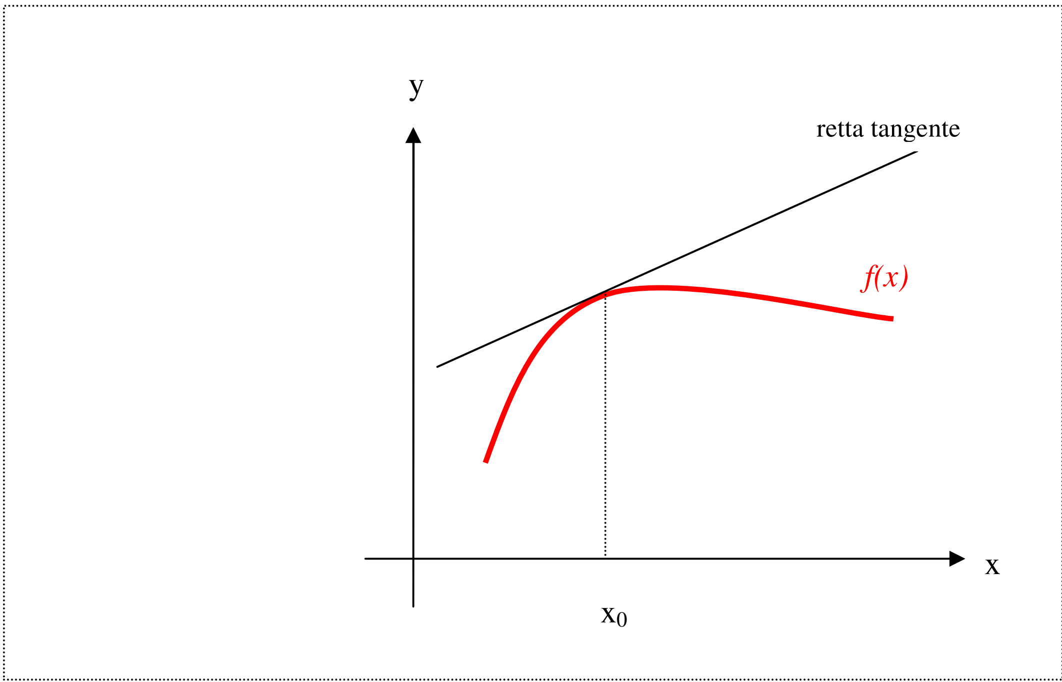
Per comprendere il concetto di derivata possiamo utilizzare diverse definizioni:

✓ ***Definizione "fisica" di derivata***

Supponiamo che un'autovettura viaggi a velocità costante. In questa situazione possiamo sicuramente dire che l'auto ha una accelerazione (o decelerazione) nulla. Possiamo quindi associare al concetto di "variazione di velocità" proprio l'accelerazione.
Se associamo alla velocità la funzione f(x), avremo che la funzione associata all'accelerazione sarà propria la sua "derivata" f'(x).

✓ ***Definizione " geometrica" di derivata***

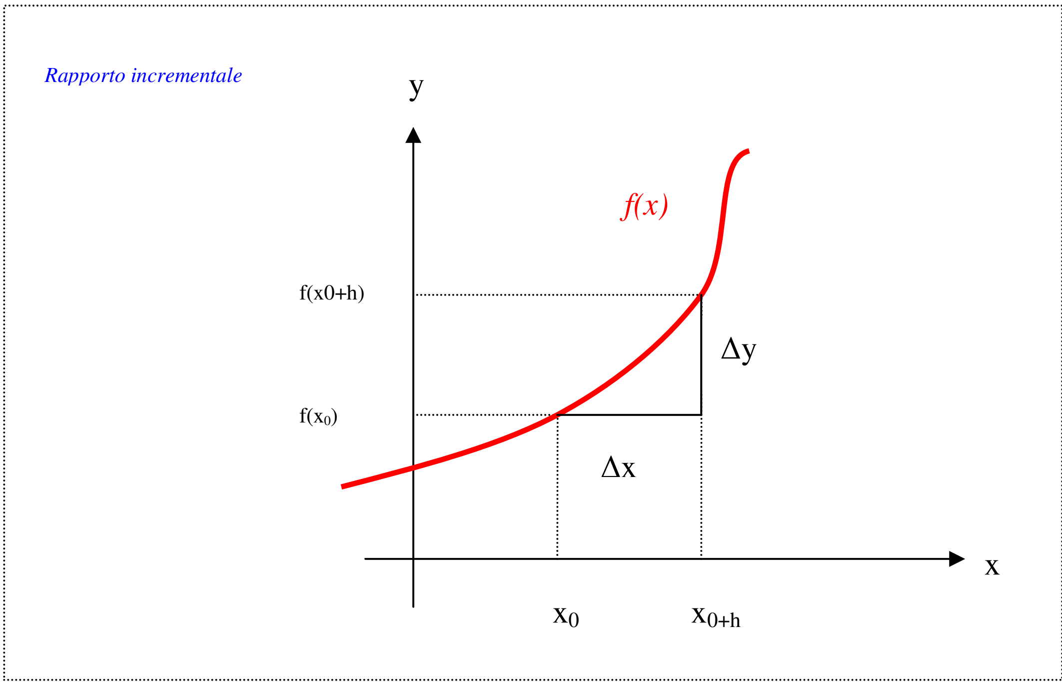
Considerata una funzione f(x), si definisce derivata di f(x) nel punto x_0, il coefficiente angolare delle retta tangente alla funzione nel punto di ascissa x_0.
Concordando con la definizione "fisica" osserviamo che se la velocità è costante, essa sarà rappresentata da una retta orizzontale che ha, appunto, coefficiente angolare nullo (così deve essere l'accelerazione).



✓ ***Definizione " matematica" di derivata***

La derivata di una funzione f(x) in un punto x_0 è il limite del rapporto incrementale per x che tende a x_0

$$f'(x) = \lim_{x \to x_0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$



Osservando infatti il grafico, si nota che Δ_x e Δ_y non sono altro che coseno e seno ed il loro rapporto sarà la tangente cioè, in accordo con le definizioni precedenti, il coefficiente angolare della retta tangente.

Tabella delle derivate elementari

$y = c \rightarrow y' = 0$

$y = x \rightarrow y' = 1$

$y = x^n \rightarrow y' = nx^{n-1}$ esempio: $y = x^4 \rightarrow y' = 4x^3$

$y = \sqrt{x} \rightarrow y' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

$y = sen\ x \rightarrow y' = \cos x$

$y = \cos x \rightarrow y' = -sen\ x$

$y = \log x \rightarrow y' = \frac{1}{x}$

$y = a^x \rightarrow y' = a^x \log a$

$y = e^x \rightarrow y' = e^x$ (è l'unica funzione uguale alla propria derivata)

$y = tag\ x \rightarrow y' = \frac{1}{\cos^2 x} = 1 + tag^2\ x$

$y = \cot g\ x \rightarrow y' = -\frac{1}{sen^2 x} = -(1 + \cot g^2\ x)$

$y = \log|x| \rightarrow y' = \frac{1}{x}$

$y = \sqrt[n]{x} \rightarrow y' = \frac{1}{\sqrt[n]{x^{n-1}}}$

$y = arc\ sen\ x \rightarrow y' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

$y = arc\cos x \rightarrow y' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

$y = arc\ tg\ x \rightarrow y' = \frac{1}{1+x^2}$

$y = arc\cot g\ x \rightarrow y' = -\frac{1}{1+x^2}$

Regole di derivazione

Derivata della somma di due funzioni:

$$y = f(x) + g(x) \rightarrow y' = f'(x) + g'(x)$$

Esempio:

$$y = x^2 + \log(x)$$

$$y' = 2x + \frac{1}{x}$$

Derivata della differenza di due funzioni:

$$y = f(x) - g(x) \rightarrow y' = f'(x) - g'(x)$$

Esempio:

$$y = x^5 - \sin(x)$$

$$y' = 5x^4 - \cos(x)$$

Derivata del prodotto di due funzioni:

$$y = f(x) * g(x) \rightarrow y' = f'(x) * g(x) + f(x) * g'(x)$$

Esempio:

$$y = x^2 \cdot \log(x)$$

$$y' = (2x) \cdot (\log(x)) + (x^2) \cdot (\frac{1}{x})$$

Derivata del prodotto di una costante per una funzione:

$$y = c * f(x) \rightarrow y' = c * f'(x)$$

Esempio

$$f(x) = 3 \cdot \cos(x)$$

$$f'(x) = 3 \cdot (-\sin(x))$$

Derivata del rapporto di due funzioni:

$$y = \frac{f(x)}{g(x)} \rightarrow y' = \frac{f'(x) * g(x) - f(x) * g'(x)}{\left[g(x)^2\right]}$$

Esempio:

$$f(x) = \frac{\sin(x)}{x^3}$$

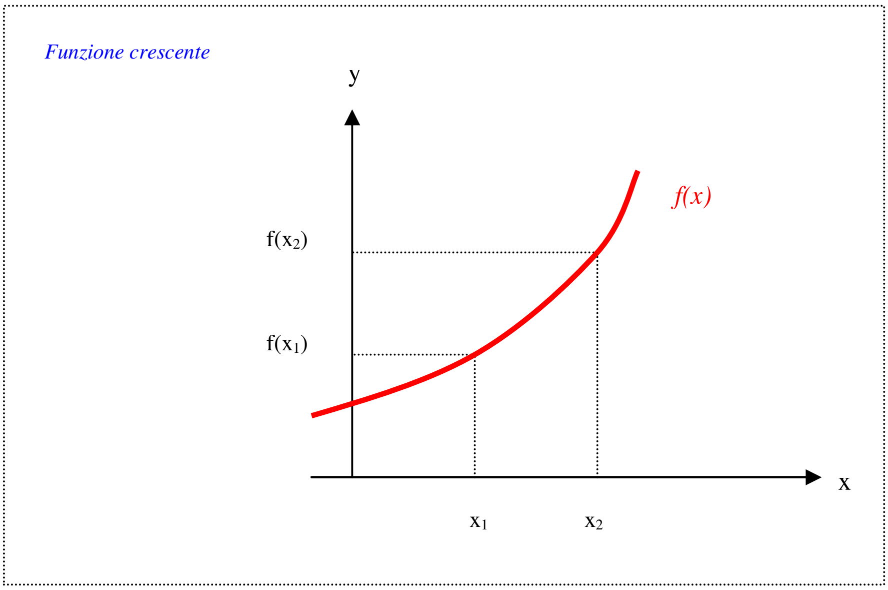
$$f'(x) = \frac{\cos(x) \cdot x^3 - \sin(x) \cdot 3x^2}{(x^3)^2}$$

✓ ***Definizione di "funzione crescente"***

Una funzione f(x) è crescente in un intervallo [a,b] se , all'aumentare dei valori della x, aumentano anche quelli della y.
In modo più rigoroso:
Una funzione è crescente in un intervallo [a,b] se, considerando due punti x_1 e x_2 appartenenti ad [a,b] con $x_1 < x_2$
risulta:

$$f(x_1)<f(x_2)$$

Considerando lo studio delle derivate, possiamo dire che:
una funzione è crescente in un punto x_0 se $f'(x_0)>0$ cioè quando è positiva la sua derivata prima calcolata in quel punto.



✓ ***Definizione di "funzione decrescente"***

Una funzione f(x) è decrescente in un intervallo [a,b] se , all'aumentare dei valori della x, diminuiscono anche quelli della y.
In modo più rigoroso:
Una funzione è decrescente in un intervallo [a,b] se, considerando due punti x_1 e x_2 appartenenti ad [a,b] con $x_1 < x_2$
risulta:

$$f(x_1)>f(x_2)$$

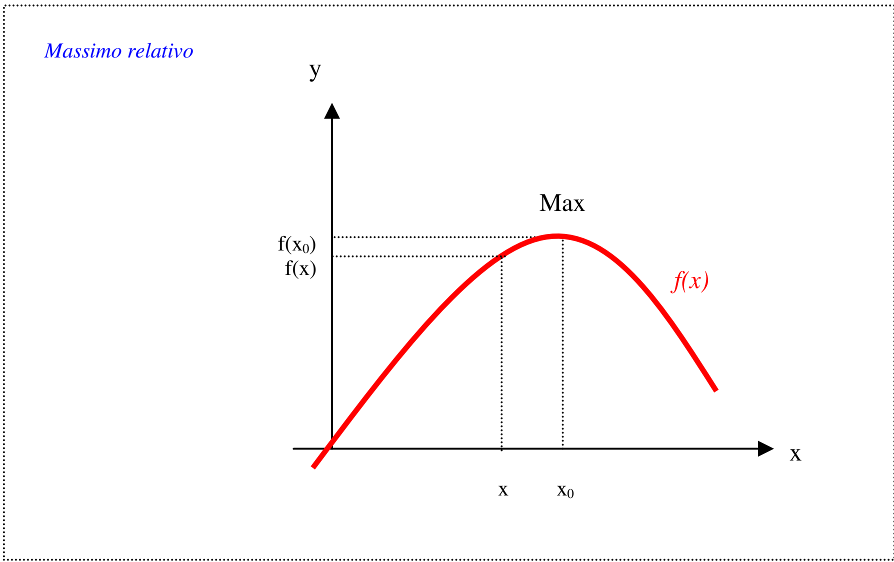
Considerando lo studio delle derivate, possiamo dire che:
una funzione è decrescente in un punto x_0 se $f'(x_0)<0$ cioè quando è negativa la sua derivata prima calcolata in quel punto.

✓ ***Definizione di massimo relativo***

Una funzione f(x) presenta un massimo relativo in un punto x_0 se, considerato un intorno I del punto x_0 ,per tutti i valori di x appartenenti a tale intorno, risulta:

$$f(x)<f(x_0)$$

Considerando lo studio delle derivate, possiamo dire che:
una funzione presenta un punto di massimo (o minimo) relativo in un punto x_0 se $f'(x_0)=0$ cioè quando è nulla la sua derivata prima calcolata in quel punto.



- ***Definizione di minimo relativo***

Una funzione f(x) presenta un minimo relativo in un punto x_0 se, considerato un intorno I del punto x_0 ,per tutti i valori di x appartenenti a tale intorno, risulta:

$$f(x)>f(x_0)$$

Considerando lo studio delle derivate, possiamo dire che:
una funzione presenta un punto di minimo (o massimo) relativo in un punto x_0 se $f'(x_0)=0$ cioè quando è nulla la sua derivata prima calcolata in quel punto.

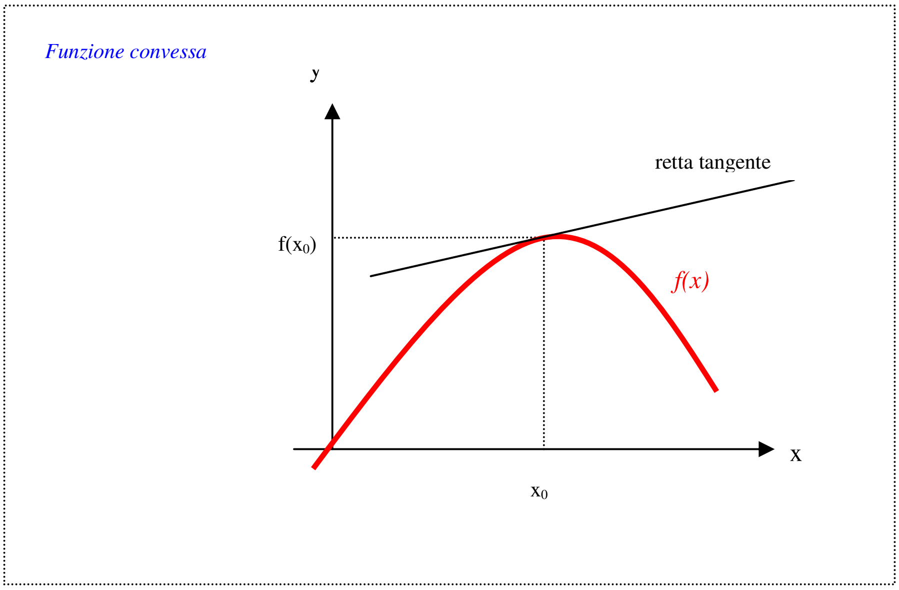
- ***Definizione di "funzione concava"***

Una funzione f(x) è concava in un punto x_0 se ,considerata la retta tangente nel punto $(x_0,f(x_0))$, risulta che, per ogni x in un intorno di x_0 , l'ordinata sulla retta tangente è minore di quella sulla funzione stessa. (La funzione sta al "disotto" della retta tangente).
Considerando lo studio delle derivate, possiamo dire che:
una funzione è concava in un punto x_0 se $f''(x_0)>0$ cioè quando è positiva la sua derivata econda calcolata in quel punto.

- ***Definizione di "funzione convessa"***

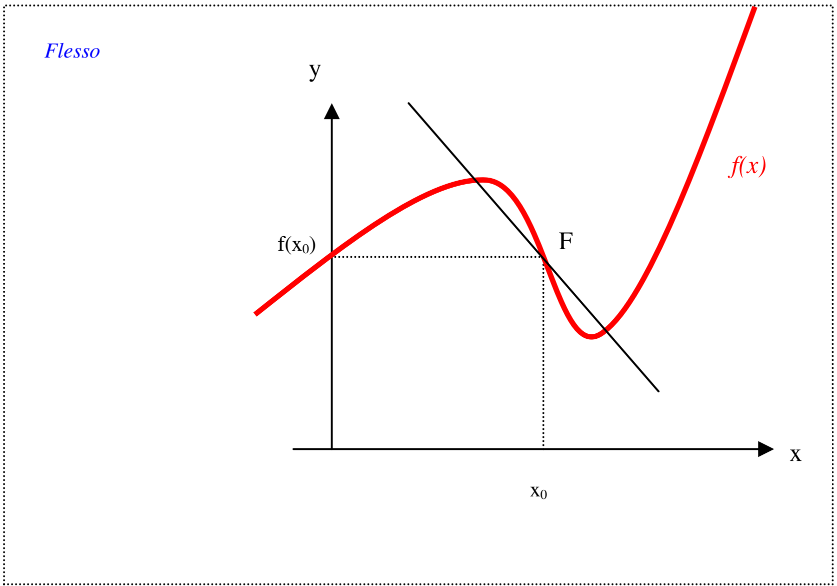
Una funzione f(x) è convessa in un punto x_0 se ,considerata la retta tangente nel punto $(x_0,f(x_0))$, risulta che, per ogni x in un intorno di x_0 , l'ordinata sulla retta tangente è maggiore di quella sulla funzione stessa.(La funzione sta al "dispre" della retta tangente).

Considerando lo studio delle derivate, possiamo dire che:
una funzione è convessa in un punto x_0 se $f''(x_0)<0$ cioè quando è negativa la sua derivata seconda calcolata in quel punto.



✓ *Definizione di flesso*

Una funzione f(x) presenta un flesso in un punto x_0 se, in quel punto, la funzione passa da concava a convessa o viceversa.
Considerando lo studio delle derivate, possiamo dire che:
una funzione presenta un punto di flesso in un punto x_0 se $f''(x_0)=0$ cioè quando è nulla la sua derivata seconda calcolata in quel punto.



Teoremi sulle funzioni derivabili

Teorema di De l'Hôpital

Consente di risolvere i limiti che si presentano con le forme indeterminate $\frac{0}{0}$ oppure $\frac{\infty}{\infty}$

IPOTESI

Date due funzioni y = f(x) ed y = g(x)

Sono definite in tutti i punti di un intorno I di un punto c , escluso al più il punto c

1. *f(x) e g(x) sono derivabili nell'intorno di I e risulta* $g'(x) \neq 0 \quad \forall x \in I - \{c\}$
2. *f(x) e g(x) sono entrambe infinitesimi oppure infiniti per x che tende a c*
3. esiste il limite: $\lim_{x \to c} \frac{f'(x)}{g'(x)}$

TESI

Allora:

$$\Rightarrow \lim_{x \to c} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to c} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

Esempio:

Il teorema di Lagrange

IPOTESI

Data una funzione y = f(x)

1. f(x) è continua in un intervallo chiuso [a,b]
2. f(x) è derivabile nei suoi punti interni

TESI

Allora esiste almeno un punto c, interno all'intervallo [a,b], in cui vale la relazione :

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c)$$

Il teorema di Rolle

IPOTESI

Data una funzione y = f(x)

1. f(x) è continua in un intervallo chiuso [a,b]
2. f(x) è derivabile nei suoi punti interni
3. La funzione assumi valori eguali agli estremi dell'intervallo [a,b]: f(a)=f(b)

TESI

Allora esiste almeno un punto c, interno all'intervallo [a,b], in cui si ha la relazione :

$$f'(c) = 0$$